



## Literatur Review: Sifat-Sifat Fundamental Turunan Fraksional Riemann–Liouville

<sup>1</sup>St. Nurhilmah Busrah \*

<sup>1</sup> Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, Indonesia

\*Email: [st.nurhilmah.busrah@unm.ac.id](mailto:st.nurhilmah.busrah@unm.ac.id)

---

### ABSTRAK

Kalkulus fraksional merupakan generalisasi kalkulus klasik yang memperluas konsep turunan dan integral ke orde non-integer. Salah satu definisi yang paling banyak digunakan adalah turunan fraksional Riemann–Liouville. Artikel ini disusun sebagai kajian pustaka yang bertujuan menelaah berbagai sifat fundamental turunan fraksional Riemann–Liouville berdasarkan literatur kalkulus fraksional. Kajian dilakukan melalui penelusuran dan analisis referensi yang membahas definisi serta sifat-sifat dasar operator tersebut. Pembahasan difokuskan pada turunan fungsi konstanta, turunan fungsi identitas, aturan kelipatan konstanta, aturan jumlah, aturan selisih, sifat kelinearan, dan aturan pangkat. Literatur yang ditelaah menunjukkan bahwa operator Riemann–Liouville mempertahankan beberapa sifat aljabar turunan klasik, seperti aturan kelipatan konstanta, aturan jumlah, aturan selisih, dan kelinearan. Namun demikian, operator ini juga memiliki karakteristik khusus, antara lain turunan fraksional fungsi konstanta yang tidak bernilai nol dan turunan fungsi identitas yang tidak bernilai satu. Artikel ini menyajikan uraian yang sistematis mengenai sifat-sifat tersebut sehingga memberikan gambaran yang lebih terstruktur tentang karakteristik dasar turunan fraksional Riemann–Liouville sebagai salah satu fondasi penting dalam kalkulus fraksional.

**Kata Kunci:** kalkulus fraksional, turunan fraksional, Riemann–Liouville, fungsi Gamma, kelinearan.

---

### ABSTRACT

Fractional calculus is a generalization of classical calculus that extends the concepts of differentiation and integration to non-integer orders. One of the most widely used definitions is the Riemann–Liouville fractional derivative. This article is presented as a literature review aimed at examining the fundamental properties of the Riemann–Liouville fractional derivative based on the existing fractional calculus literature. The review is conducted through the examination and analysis of references discussing the definition and basic properties of this operator. The discussion focuses on the fractional derivatives of constant and identity functions, the constant multiple rule, the sum rule, the difference rule, linearity, and the power rule. The reviewed literature indicates that the Riemann–Liouville operator preserves several algebraic properties of the classical derivative, including the constant multiple rule, the sum rule, the difference rule, and linearity. However, it also exhibits distinctive characteristics, such as the fact that the fractional derivative of a constant function is not zero and the fractional derivative of the identity function is not one. This article provides a systematic overview of these properties, offering a structured understanding of the fundamental characteristics of the Riemann–Liouville fractional derivative as one of the key foundations of fractional calculus.

**Keywords:** fractional calculus, fractional derivative, Riemann–Liouville, Gamma function, linearity.

---

## 1. PENDAHULUAN

Kalkulus merupakan salah satu cabang matematika yang memiliki peranan penting dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu konsep utama

dalam kalkulus adalah turunan, yang digunakan untuk menggambarkan laju perubahan suatu besaran terhadap variabel tertentu. Dalam kalkulus klasik, turunan didefinisikan untuk orde bilangan bulat positif, sehingga memungkinkan penentuan turunan orde pertama, kedua, ketiga, dan seterusnya. Namun, perkembangan teori matematika memunculkan pertanyaan mengenai makna turunan apabila ordenya bukan lagi berupa bilangan bulat, melainkan bilangan real atau bahkan kompleks (Podlubny, 1999).

Gagasan mengenai turunan berorde non-integer pertama kali muncul dalam korespondensi antara L'Hospital dan Leibniz pada tahun 1695. Dalam surat tersebut, L'Hospital mempertanyakan interpretasi dari turunan berorde  $1/2$ , yang kemudian dijawab oleh Leibniz sebagai suatu paradoks yang kelak akan memiliki makna matematis yang penting. Pertanyaan tersebut menjadi titik awal berkembangnya bidang kajian yang saat ini dikenal sebagai kalkulus fraksional (Loverro, 2004). Kalkulus fraksional merupakan generalisasi dari kalkulus klasik yang mempelajari integral dan turunan berorde sembarang, baik berupa bilangan real maupun kompleks (Podlubny, 1999).

Dalam perkembangannya, kalkulus fraksional tidak hanya menjadi objek kajian teoritis, tetapi juga telah diterapkan dalam berbagai bidang ilmu seperti fisika, teknik, biologi, ekonomi, sistem kontrol, pengolahan sinyal, serta pemodelan material viskoelastik. Kemampuan operator fraksional dalam merepresentasikan efek memori (memory effect) dan sifat nonlokal menjadikannya sesuai untuk menggambarkan berbagai fenomena kompleks yang sulit direpresentasikan oleh operator diferensial klasik (Loverro, 2004; Podlubny, 1999).

Berbagai pendekatan telah dikembangkan untuk mendefinisikan turunan fraksional, di antaranya pendekatan Riemann–Liouville, Caputo, dan Grünwald–Letnikov. Di antara berbagai pendekatan tersebut, definisi Riemann–Liouville merupakan salah satu definisi yang paling awal dan paling banyak digunakan dalam pengembangan teori kalkulus fraksional karena memiliki landasan matematis yang kuat dan berkaitan erat dengan konsep integral fraksional (Samko et al., 1993). Melalui pendekatan ini, konsep turunan diperluas dengan melibatkan fungsi Gamma sebagai generalisasi dari fungsi faktorial pada bilangan bulat.

Berbagai aspek mengenai turunan fraksional Riemann–Liouville telah dibahas dalam literatur. Loverro (2004) mengulas sejarah perkembangan kalkulus fraksional, berbagai definisi yang digunakan, serta aplikasinya dalam bidang teknik. Johansyah dkk. (2017) membahas definisi dan karakteristik integral serta turunan fraksional Riemann–Liouville dan Caputo, termasuk sifat bahwa turunan fraksional Riemann–Liouville dari fungsi konstanta tidak selalu bernilai nol. Selain itu, berbagai referensi lain seperti Samko et al. (1993), Podlubny (1999), dan Kilbas et al. (2006) telah memaparkan definisi, sifat-sifat dasar, serta landasan teoritis turunan fraksional Riemann–Liouville secara komprehensif.

Meskipun berbagai sifat turunan fraksional Riemann–Liouville telah dibahas dalam literatur, pembahasannya sering tersebar pada berbagai sumber dengan fokus yang beragam, mulai dari aspek teoritis hingga aplikasinya pada berbagai bidang. Oleh karena itu, diperlukan suatu kajian yang merangkum dan menyajikan kembali sifat-sifat fundamental tersebut secara terstruktur sehingga hubungan antara turunan

fraksional Riemann–Liouville dan aturan diferensiasi pada kalkulus klasik dapat dipahami dengan lebih mudah.

Berdasarkan hal tersebut, artikel ini disusun sebagai kajian pustaka yang bertujuan menelaah dan menyajikan secara sistematis berbagai sifat fundamental turunan fraksional Riemann–Liouville yang telah dibahas dalam literatur. Pembahasan difokuskan pada turunan fraksional fungsi konstanta, turunan fungsi identitas, aturan kelipatan konstanta, aturan jumlah, aturan selisih, sifat kelinearan, dan aturan pangkat. Artikel ini tidak diarahkan untuk mengembangkan definisi, teorema, atau hasil baru, melainkan untuk merangkum dan mengorganisasikan berbagai konsep serta sifat yang telah tersedia dalam literatur kalkulus fraksional.

Kajian ini diharapkan dapat memberikan gambaran yang lebih terstruktur mengenai karakteristik dasar turunan fraksional Riemann–Liouville sebagai generalisasi turunan klasik serta menjadi salah satu referensi berbahasa Indonesia bagi pembaca yang ingin mempelajari kalkulus fraksional.

## 2. METODE PENELITIAN

Artikel ini disusun menggunakan metode kajian pustaka (literature review) yang berfokus pada pembahasan sifat-sifat fundamental turunan fraksional Riemann–Liouville. Sumber kajian berupa buku teks, artikel jurnal, prosiding, dan publikasi ilmiah lain yang relevan dengan kalkulus fraksional, khususnya yang membahas definisi dan sifat-sifat turunan fraksional Riemann–Liouville.

Tahapan kajian diawali dengan pengumpulan dan penelaahan literatur yang relevan. Selanjutnya dilakukan pengkajian terhadap definisi, sifat-sifat dasar, serta hasil-hasil teoritis yang telah dibahas dalam literatur terkait. Informasi yang diperoleh kemudian diorganisasikan dan disajikan secara sistematis untuk menggambarkan karakteristik turunan fraksional Riemann–Liouville serta keterkaitannya dengan aturan diferensiasi pada kalkulus klasik. Hasil kajian disusun secara deskriptif dengan merujuk pada definisi, sifat, dan formulasi yang telah tersedia dalam berbagai referensi, sehingga diperoleh uraian yang terstruktur mengenai konsep dasar turunan fraksional Riemann–Liouville.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1 Turunan Fraksional Riemann–Liouville

Turunan fraksional Riemann–Liouville merupakan generalisasi dari turunan berorde bilangan bulat menjadi turunan berorde sembarang.

#### Definisi 3.1

Diberikan fungsi  $f(x)$  pada interval  $[a, b]$ , maka persamaan berikut yakni;

$${}_x D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt$$

$${}_x D_{b-}^{\alpha} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt$$

masing-masing disebut turunan fraksional kiri dan kanan berorde  $\alpha$ , dengan  $0 < \alpha < 1$ . Turunan fraksional ini dinamakan dengan turunan fraksional Riemann Liouville (Samko, 1993).

Orde  $\alpha$  dengan  $0 < \alpha < 1$  selanjutnya diperbesar menjadi  $\alpha \geq 1$ . Dengan menggunakan notasi  $[\alpha]$  yang berarti bagian bilangan bulat dari suatu bilangan  $\alpha$ , dan notasi  $\{\alpha\}$  yang berarti bagian fraksional dari  $\alpha$  dengan  $0 \leq \{\alpha\} < 1$ . Maka orde  $\alpha \geq 1$  dapat ditunjukkan sebagai,

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}.$$

Dengan demikian, jika  $\alpha$  adalah bilangan bulat, maka turunan berorde  $\alpha$  ditulis sebagai

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$$

dengan  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ . Sedangkan jika  $\alpha$  bukan bilangan bulat, maka turunan berorde  $\alpha$  ditulis sebagai

$$D_{a+}^{\alpha} f := \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} D_{a+}^{\{\alpha\}} f = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f$$

$$D_{b-}^{\alpha} f := -\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} D_{b-}^{\{\alpha\}} f = -\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{b-}^{1-\{\alpha\}} f$$

Sehingga

$${}_x D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

$${}_x D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt$$

dengan  $n = [\alpha] + 1$  (Samko, 1993).

### Definisi 3.2

Diberikan fungsi  $f(x)$  pada interval  $[a, b]$ , maka persamaan berikut yakni;

$${}_x D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt,$$

dengan

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

disebut turunan fraksional kiri berorde  $\alpha$ , dengan  $\alpha > 0$ , dan  $n$  bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari  $\alpha$  sedemikian sehingga  $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$  (Samko, 1993).

Definisi tersebut menunjukkan bahwa turunan fraksional diperoleh melalui kombinasi operasi integral dan diferensiasi yang melibatkan fungsi Gamma. Oleh karena itu, fungsi Gamma memegang peranan penting dalam teori kalkulus fraksional.

### 3.2 Turunan Fraksional Fungsi Konstanta

Pada kalkulus klasik, turunan fungsi konstanta bernilai nol. Namun, dalam literatur kalkulus fraksional telah diketahui bahwa sifat tersebut tidak selalu berlaku untuk turunan fraksional Riemann–Liouville (Samko et al., 1993; Podlubny, 1999). Sebagai ilustrasi, untuk fungsi  $f(x) = k$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ , dan  $a = 0$  diperoleh:

$$\begin{aligned} {}_x D_{0+}^{\frac{1}{2}} k &= \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{k}{(x-t)^{\frac{1}{2}-1+1}} dt \\ &= \frac{k}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \frac{k}{\sqrt{\pi x}} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Perhitungan tersebut mengilustrasikan bahwa turunan fraksional Riemann–Liouville dari fungsi konstanta tidak bernilai nol. Hasil ini sesuai dengan teori yang telah dibahas dalam literatur dan menunjukkan bahwa sifat turunan konstanta pada kalkulus klasik tidak selalu berlaku dalam kalkulus fraksional.

### 3.3 Turunan Fraksional Fungsi Identitas

Pada kalkulus klasik berlaku bahwa

$$\frac{d}{dx}(x) = 1.$$

Namun, dalam teori turunan fraksional Riemann–Liouville diketahui bahwa turunan fungsi identitas tidak selalu bernilai satu. Sebagai ilustrasi, untuk fungsi  $f(x) = x$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ , dan  $a = 0$ , diperoleh:

$$\begin{aligned}
{}_x D_{0+}^{\frac{1}{2}} x &= \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}-1+1}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \\
&= \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\
&= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\
&\neq 1
\end{aligned}$$

Perhitungan tersebut mengilustrasikan perbedaan antara turunan klasik dan turunan fraksional Riemann–Liouville. (Johansyah M. D., 2017).

### 3.4 Aturan Kelipatan Konstanta

Turunan fraksional Riemann–Liouville memenuhi aturan kelipatan konstanta, yaitu:

$${}_x D_{a+}^{\alpha} [\lambda f(x)] = \lambda {}_x D_{a+}^{\alpha} f(x).$$

Sifat ini menunjukkan bahwa operator turunan fraksional mempertahankan homogenitas terhadap perkalian skalar (Johansyah M. D., 2017).

#### Bukti

Diberikan fungsi  $f(x)$  yang terdefinisi pada  $\mathbb{R}$  dan  $\lambda$  adalah suatu konstanta, dengan Definisi 3.2 diperoleh

$$\begin{aligned}
{}_x D_{a+}^{\alpha} [\lambda \cdot f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{\lambda f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\
&= \lambda \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\
&= \lambda {}_x D_{a+}^{\alpha} f(x) \blacksquare
\end{aligned}$$

### 3.5 Aturan Jumlah dan Selisih

Sebagaimana pada kalkulus klasik, turunan fraksional Riemann–Liouville memenuhi aturan jumlah dan aturan selisih:

$${}_x D_{a+}^{\alpha} [f(x) + g(x)] = {}_x D_{a+}^{\alpha} f(x) + {}_x D_{a+}^{\alpha} g(x)$$

dan

$${}_x D_{a+}^{\alpha} [f(x) - g(x)] = {}_x D_{a+}^{\alpha} f(x) - {}_x D_{a+}^{\alpha} g(x).$$

Sifat ini menunjukkan bahwa operator turunan fraksional Riemann–Liouville mempertahankan struktur aditif (Johansyah M. D., 2017).

**Bukti**

Diberikan fungsi  $f(x)$  yang terdefinisi pada  $\mathbb{R}$ , dengan menggunakan Definisi 3.2 diperoleh

$$\begin{aligned} {}_x D_{a+}^{\alpha}[f(x) + g(x)] &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t) + g(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \int_a^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt + \int_a^x \frac{g(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{g(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt \\ &= {}_x D_{a+}^{\alpha} f(x) + {}_x D_{a+}^{\alpha} g(x) \blacksquare \end{aligned}$$

Bukti untuk aturan selisih serupa.

**3.6 Teorema Kelinearan Turunan Fraksional Riemann-Liouville**

Salah satu sifat penting yang menjadikan turunan fraksional Riemann-Liouville dapat digunakan dalam berbagai model matematika adalah sifat linearitasnya.

Diberikan fungsi  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi pada  $\mathbb{R}$ ,  $\lambda$  dan  $\mu$  adalah konstanta, maka untuk orde  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , dan  $n$  bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari  $\alpha$  sedemikian sehingga  $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , berlaku

**Teorema 3.3**

Misalkan  $f(x)$  dan  $g(x)$  merupakan fungsi yang terdiferensialkan secara fraksional pada interval  $[a, b]$ , dan  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , maka untuk orde  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , dan  $n$  bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari  $\alpha$  sedemikian sehingga  $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , operator turunan fraksional Riemann-Liouville memenuhi sifat linear

$${}_x D_{a+}^{\alpha}[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda {}_x D_{a+}^{\alpha} f(x) + \mu {}_x D_{a+}^{\alpha} g(x)$$

(Johansyah M. D., 2017).

**Bukti**

Diberikan fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$  yang terdefinisi pada  $\mathbb{R}$ ,  $\lambda$  dan  $\mu$  adalah suatu konstanta, berdasarkan definisi turunan fraksional kiri Riemann-Liouville,

$${}_x D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt.$$

Dengan mensubstitusikan fungsi

$$h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x),$$

diperoleh

$${}_x D_{a+}^{\alpha} h(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{\lambda f(t) + \mu g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

Karena integral dan turunan merupakan operator linear, maka

$$\begin{aligned} {}_x D_{a+}^{\alpha} [\lambda f(x) + \mu g(x)] \\ = \lambda \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt + \mu \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$${}_x D_{a+}^{\alpha} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda {}_x D_{a+}^{\alpha} f(x) + \mu {}_x D_{a+}^{\alpha} g(x).$$

Teorema terbukti.

Dengan demikian, operator turunan fraksional Riemann-Liouville merupakan operator linear.

### 3.7 Aturan Pangkat

Untuk fungsi pangkat  $f(x) = x^n$ , diperoleh bentuk umum turunan fraksional kiri yaitu

$$D_{a+}^{\alpha} (x^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}.$$

(Johansyah M. D., 2017).

#### Bukti

Perhatikan bahwa jelas untuk fungsi  $f(x) = x^n$ , dengan  $n$  bilangan bulat positif

$$\begin{aligned} D_x (x^n) &= nx^{n-1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \cdots (1)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \cdots (1)} x^{n-2} \\ &= \frac{n!}{(n-1)!} x^{n-1}. \end{aligned}$$

Dengan metode yang sama maka untuk turunan dengan orde yang lebih tinggi dari  $f(x) = x^n$  dapat diperoleh bahwa

$$D^2(x^n) = \frac{n!}{(n-2)!} x^{n-2}$$

$$D^3(x^n) = \frac{n!}{(n-3)!} x^{n-3}$$

$$D^4(x^n) = \frac{n!}{(n-4)!} x^{n-4}$$

$$D^5(x^n) = \frac{n!}{(n-5)!} x^{n-5}$$

⋮

$$D^\alpha(x^n) = \frac{n!}{(n-\alpha)!} x^{n-\alpha}, \text{ untuk } n \in \mathbb{N}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan sifat  $\Gamma(n+1) = n!$  maka persamaan di atas dapat dituliskan kembali dalam bentuk sebagai berikut

$${}_x D_{a+}^\alpha(x^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}.$$

Rumus ini merupakan generalisasi aturan pangkat pada kalkulus klasik dan menunjukkan keterkaitan erat antara kalkulus fraksional dan fungsi Gamma. Dengan mengambil  $\alpha = 1$  maka diperoleh aturan pangkat klasik sebagai kasus khusus.

### 3.8 Aplikasi Turunan Fraksional pada Persamaan Diferensial Fraksional

Salah satu penggunaan utama kalkulus fraksional adalah dalam penyelesaian persamaan diferensial fraksional. Persamaan diferensial fraksional banyak digunakan untuk memodelkan fenomena yang memiliki efek memori (*memory effect*), seperti perpindahan panas, viskoelastisitas, sistem kontrol, dan dinamika populasi.

Pertimbangkan persamaan diferensial fraksional sederhana

$$D_t^\alpha y(t) = \lambda y(t), 0 < \alpha < 1,$$

dengan  $\lambda$  konstanta.

Dengan menggunakan metode deret pangkat pada kalkulus fraksional, solusi persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$y(t) = y_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha),$$

dengan

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

merupakan fungsi Mittag-Leffler.

Fungsi Mittag-Leffler berperan dalam kalkulus fraksional sebagaimana fungsi eksponensial pada persamaan diferensial biasa. Ketika  $\alpha = 1$ , diperoleh

$$E_1(z) = e^z$$

sehingga solusi di atas menjadi

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t},$$

yang merupakan solusi klasik dari persamaan diferensial orde satu. Literatur kalkulus fraksional menunjukkan bahwa persamaan diferensial fraksional

merupakan generalisasi dari persamaan diferensial biasa. Berbeda dengan turunan klasik yang bersifat lokal, turunan fraksional memiliki sifat nonlokal sehingga nilainya pada suatu titik dipengaruhi oleh nilai fungsi pada interval sebelumnya. Dalam berbagai referensi, karakteristik ini dikaitkan dengan kemampuan kalkulus fraksional untuk memodelkan fenomena yang melibatkan efek memori dan ketergantungan historis. Selain itu, operator Riemann–Liouville diketahui mempertahankan beberapa sifat aljabar dasar, seperti linearitas, aturan jumlah, dan aturan selisih, meskipun tidak mempertahankan seluruh sifat turunan klasik. Karakteristik tersebut tercermin dari fakta bahwa turunan fraksional fungsi konstanta tidak bernilai nol dan turunan fraksional fungsi identitas tidak bernilai satu.

#### 4. KESIMPULAN

Artikel ini telah menyajikan kajian pustaka mengenai sifat-sifat fundamental turunan fraksional Riemann–Liouville berdasarkan berbagai referensi dalam literatur kalkulus fraksional. Literatur yang ditelaah menunjukkan bahwa beberapa aturan yang berlaku pada turunan klasik tetap dipertahankan oleh operator Riemann–Liouville, seperti aturan kelipatan konstanta, aturan jumlah, aturan selisih, kelinearan, dan aturan pangkat. Di sisi lain, literatur juga menunjukkan adanya karakteristik yang membedakannya dari turunan klasik, antara lain turunan fraksional fungsi konstanta yang tidak bernilai nol dan turunan fraksional fungsi identitas yang tidak bernilai satu.

Secara keseluruhan, kajian ini memberikan gambaran yang terstruktur mengenai karakteristik dasar turunan fraksional Riemann–Liouville sebagai salah satu konsep penting dalam kalkulus fraksional.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., & Trujillo, J. J. (2017). *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*. World Scientific Publishing.
- Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Springer.
- Johansyah, M. D., Nahar, J., & Badruzzaman, F. H. (2017). Analisis turunan dan integral fraksional fungsi pangkat tiga dan fungsi eksponensial. *Jurnal Matematika*, 16(2). <http://ejournal.unisba.ac.id>
- Johansyah, M. D., Nahar, J., Supriatna, A. K., & Supian, S. (2017). Kajian dasar integral dan turunan fraksional Riemann–Liouville. *Industrial Research Workshop and National Seminar Politeknik Negeri Bandung*, 26–27.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier.
- Loverro, A. (2004). *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*. Report.

- Machado, J. A. T., Kiryakova, V., & Mainardi, F. (2011). Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(3), 1140-1153.
- Oldham, K. B., & Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press.
- Podlubny, I., Skovranek, T., & Jara, B. M. V. (2009). Matrix approach to discretization of ordinary and partial differential equations of arbitrary real order: The MATLAB toolbox. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*. <https://doi.org/10.1115/DETC2009-86944>
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press.
- Purcell, E. J., & Varberg, D. (1999). *Kalkulus dan Geometri Analitis* (Edisi ke-5, Jilid 1). Jakarta: Erlangga.
- Putra, V. (2020). *Turunan Fraksional dan Aplikasinya dalam Persamaan Diferensial*. Universitas Riau.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers.