GAUSS : Journal of Mathematics, Statistics, and Mathematics Education
e-ISSN: 3124-3681 journal.ininnawaparaedu.com
Vol 02, No 01, 67-75

Tinjauan Teorema Titik Tetap pada Beberapa Kontraksi Tipe Chatterjea di Ruang Metrik Klasik

[1]**Syamsuddin Mas'ud***
[1] Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, Indonesia
*Email: syamsuddinm@unm.ac.id

ABSTRAK
Tulisan ini meninjau teorema titik tetap untuk lima varian kontraksi tipe Chatterjea pada ruang metrik klasik: Zamfirescu, Ćirić, weak C-contraction, Singh-Chatterjea, dan Suzuki-Chatterjea. Melalui pendekatan studi pustaka komparatif, dipetakan hubungan implikasi logis antar kelas kontraksi tersebut dalam bentuk tabel. Hasil kajian menunjukkan bahwa kontraksi Chatterjea klasik mengimplikasikan semua varian yang dibahas, namun tidak sebaliknya. Selain itu, ditegaskan bahwa kontraksi Chatterjea bukan merupakan perumuman dari kontraksi Banach, melainkan kelas yang berdiri sendiri dengan karakteristik jarak silang. Tinjauan ini juga menyoroti keunggulan teoritis Chatterjea dalam mengkarakterisasi kelengkapan ruang metrik, sifat yang tidak dimiliki kontraksi Banach. Artikel ini diharapkan menjadi rujukan awal yang sistematis bagi peneliti dalam menavigasi hierarki teorema titik tetap tipe Chatterjea.

Kata Kunci: Titik Tetap, Kontraksi Chatterjea, Ruang Metrik, Weak C-Contraction, Hubungan Implikasi

ABSTRACT
This paper reviews fixed point theorems for five variants of Chatterjea-type contractions in classical metric spaces: Zamfirescu, Ćirić, weak C-contraction, Singh-Chatterjea, and Suzuki-Chatterjea. Through a comparative literature study approach, we map the logical implication relationships among these contraction classes in a table format. The results show that the classical Chatterjea contraction implies all the discussed variants, but not vice versa. Furthermore, it is emphasized that Chatterjea contraction is not a generalization of Banach contraction; rather, it stands as an independent class characterized by cross-distance. This review also highlights the theoretical advantage of Chatterjea contraction in characterizing metric space completeness, a property not possessed by Banach contraction. This article is expected to serve as a systematic initial reference for researchers in navigating the hierarchy of Chatterjea-type fixed point theorems.

Keywords: Fixed Point, Chatterjea Contraction, Metric Space, Weak C-Contraction, Implication

1. PENDAHULUAN

Prinsip kontraksi Banach yang dikemukakan Stefan Banach (Banach, 1922) adalah salah satu hasil paling dasar dalam analisis matematika. Secara singkat, teorema ini mengatakan: jika sebuah pemetaan pada ruang metrik lengkap membuat jarak antara dua bayangan selalu lebih kecil (dengan faktor kurang dari satu) dari jarak titik asalnya, maka pemetaan itu pasti mempunyai tepat satu titik tetap. Selain itu, titik tetap tersebut bisa didekati dengan mengulang-ulang pemetaan dari sebarang titik awal.

Namun, tidak semua pemetaan yang memiliki titik tetap harus memenuhi syarat Banach. Ada kelas pemetaan lain yang bentuknya sangat berbeda, tetapi tetap menjamin adanya titik tetap. Hal ini mendorong lahirnya berbagai alternatif, di antaranya yang terkenal adalah kontraksi Kannan (1968) dan kontraksi Chatterjea (1972).

Kontraksi Kannan memiliki bentuk:

$$d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \qquad \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Subrahmanyam (1975) kemudian menunjukkan bahwa teorema Kannan justru bisa dipakai untuk mencirikan kelengkapan ruang metrik: suatu ruang metrik lengkap jika dan hanya jika setiap pemetaan Kannan di ruang itu memiliki titik tetap.

Empat tahun kemudian, Chatterjea (1972) mengusulkan kondisi yang berbeda:

$$d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \qquad \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Perhatikan bahwa di ruas kanan muncul jarak silang: jarak dari x ke Ty ditambah jarak dari y ke Tx. Bentuk ini sama sekali tidak mengandung jarak langsung $d(x, y)$. Karena itu, kontraksi Chatterjea bukanlah perumuman dari kontraksi Banach.

Seiring waktu, dari ide Chatterjea ini lahir beberapa varian lain, seperti kontraksi Zamfirescu (1972) yang menggabungkan Banach, Kannan, dan Chatterjea; kontraksi Ćirić (1974) yang menggunakan nilai maksimum dari lima suku jarak; *weak C-contraction* (Choudhury, 2009); kontraksi Singh-Chatterjea yang bekerja pada iterasi ke-p (Bekri & Fabiano, 2025); serta generalisasi ala Suzuki (Kikkawa & Suzuki, 2008; Imdad & Erduran, 2013; Hashimoto dkk., 2026) yang memberikan syarat paling ringan namun tetap menjamin titik tetap.

Beberapa artikel ringkasan sudah ada, misalnya Park (2024) tentang keluarga teorema kelengkapan, atau Patil dkk. (2022) tentang tumpang tindih hasil titik tetap. Namun, berdasarkan penelusuran pustaka, belum ada artikel dalam bahasa Indonesia yang secara sederhana memetakan hubungan antar varian kontraksi tipe Chatterjea ini dalam ruang metrik klasik, sekaligus menegaskan bahwa Chatterjea berbeda dari Banach.

Tulisan ini hanya membahas pemetaan bernilai tunggal pada ruang metrik klasik yang lengkap. Dalam tulisan ini tidak dilakukan pembahasan pada perluasan ke ruang seperti b-metrik atau metrik parsial. Ada tiga hal yang menjadi fokus tinjauan ini: (1) peta implikasi antar kelas dalam bentuk tabel, (2) bahasa yang bertahap dan penjelasan intuitif, (3) catatan tegas bahwa Chatterjea bukan perumuman Banach.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan studi pustaka dengan pendekatan komparatif. Pertama, dilakukan penelusuran dan pemilihan artikel-artikel penting tentang teorema titik tetap untuk kontraksi tipe Chatterjea di ruang metrik klasik, dengan kriteria: pemetaan bernilai tunggal, ruang metrik lengkap, dan bentuk kontraksi yang masih mempertahankan ciri jarak silang khas Chatterjea.

Lima varian utama yang dikaji adalah sebagai berikut:

a. Zamfirescu (1972)
b. Ćirić (1974)
c. Weak C-contraction (Choudhury, 2009)
d. Singh-Chatterjea (Bekri & Fabiano, 2025)

e. Suzuki-Chatterjea (Kikkawa & Suzuki, 2008; Imdad & Erduran, 2013; Hashimoto dkk., 2026)

Untuk setiap varian, diuraikan definisi, teorema titik tetap, hubungan dengan Banach, serta contoh. Selanjutnya dilakukan analisis implikasi logis antar kelas, disajikan dalam bentuk tabel. Penulisan juga disesuaikan dengan kaidah bahasa yang komunikatif namun tetap formal agar dapat dipahami dengan baik oleh pembaca.

3. TEOREMA TITIK TETAP KONTRAKSI TIPE CHATTERJEA

Pemahaman mengenai tipe-tipe kontraksi Chatterjea memerlukan beberapa prasyarat dasar, yaitu konsep ruang metrik lengkap, barisan konvergen, barisan Cauchy, serta kelengkapan ruang metrik.

Definisi 3.1 (Fréchet, 1906) Diberikan himpunan tak kosong X dan pemetaan $d: X \times X \to [0, \infty)$ dengan sifat bahwa untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku:

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Pemetaan d disebut metrik atas X dan (X, d) disebut ruang metrik.

Definisi 3.2 (Fréchet, 1906; Hausdorff, 1914; Kreyszig, 1978; Rudin, 1976) Diberikan ruang metrik (X, d) dan barisan $\{x_n\}$ di dalam X.

i) Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq K$, $d(x_n, x) < \epsilon$.

ii) Barisan $\{x_n\}$ dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $m, n \geq K$, $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

iii) Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya merupakan barisan konvergen.

Berikut ini disajikan definisi dari pemetaan kontraksi tipe Chatterjea yang menjadi salah satu pembahasan utama dalam tulisan ini.

Definisi 3.3 (Chatterjea, 1972) Diberikan ruang metrik (X, d) dan pemetaan $T: X \to X$. Pemetaan T dikatakan sebagai kontraksi Chatterjea jika terdapat $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku bahwa:

$$d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Ty) + d(y, Tx)].$$

Berdasarkan definisi di atas, Chatterjea telah membuktikan bahwa pemetaan yang memenuhi sifat tersebut memiliki titik tetap yang tunggal. Hasil ini dinyatakan secara formal dalam teorema berikut.

Teorema 3.4 (Chatterjea, 1972) Misalkan (X, d) adalah ruang metrik lengkap dan $T: X \to X$ suatu pemetaan. Jika pemetaan T merupakan pemetaan kontraksi Chatterjea maka T memiliki tepat satu titik tetap.

Kontraksi Chatterjea berbeda secara fundamental dengan kontraksi Banach maupun kontraksi Kannan. Tidak terdapat hubungan perumuman di antara ketiganya.

Selanjutnya, setelah diberikan konsep-konsep dasar yang diperlukan, maka akan dibahas mengenai lima definisi ataupun teorema titik tetap kontraksi tipe Chatterjea.

3.1 Zamfirescu

Zamfirescu menggabungkan tiga kelas: Banach, Kannan, dan Chatterjea. Berikut ini diberikan teorema titik tetap Zamfirescu secara formal.

Teorema 3.5 (Zamfirescu, 1972) Misalkan (X, d) adalah ruang metrik lengkap dan $T: X \to X$ suatu pemetaan. Jika terdapat bilangan a, b, c dengan $0 \le a < 1, 0 \le b, c < \frac{1}{2}$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi salah satu dari:

a. $d(Tx, Ty) \le a\, d(x, y)$;
b. $d(Tx, Ty) \le b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;
c. $d(Tx, Ty) \le c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$;

maka T memiliki tepat satu titik tetap.

Kondisi pada Teorema 3.5 bersifat disjungtif (alternatif). Artinya, untuk setiap pasangan titik dalam ruang, pemetaan yang dikaji hanya perlu memenuhi salah satu dari tiga bentuk ketaksamaan yang telah disebutkan sebelumnya. Karena pemetaan kontraksi tipe Chatterjea memenuhi bentuk ketaksamaan ketiga untuk setiap pasangan titik, maka kelas kontraksi Chatterjea merupakan subkelas sejati dari kelas operator Zamfirescu. Teorema ini menyatukan tiga prinsip kontraksi klasik dalam satu kerangka.

3.2 Kontraksi Ćirić

Setelah teorema titik tetap Zamfirescu, pada tahun 1974 Ćirić memberikan perumuman terhadap ketiga tipe kontraksi yang termuat dalam teorema Zamfirescu. Berikut diberikan definisi dan teorema tersebut secara formal.

Definisi 3.6 (Ćirić, 1974) Diberikan ruang metrik (X, d) dan pemetaan $T: X \to X$. Pemetaan T dikatakan sebagai kontraksi Ćirić jika terdapat $\beta \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku bahwa:

$$d(Tx, Ty) \le \beta \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}.$$

Teorema 3.7 (Ćirić, 1974) Misalkan (X, d) adalah ruang metrik lengkap dan $T: X \to X$ suatu pemetaan. Jika pemetaan T merupakan pemetaan kontraksi Ćirić maka T memiliki tepat satu titik tetap.

Kontraksi Chatterjea merupakan kasus khusus dari kontraksi Ćirić. Hal ini dapat ditunjukkan melalui ketaksamaan,

$$\frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \le \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}.$$

Namun, perlu dipahami bahwa ini berarti kontraksi Ćirić mencakup kontraksi Chatterjea, bukan sebaliknya. Kontraksi Chatterjea tidak mencakup kontraksi Ćirić.

3.3 Kontraksi *Weak C-Contraction*

Beberapa tahun setelah hasil Ćirić, pada tahun 2009 Choudhury memperkenalkan generalisasi lain dari kontraksi Chatterjea yang dikenal sebagai *weak C-contraction* atau kontraksi C-lemah. Berikut diberikan definisi dan teorema tersebut secara formal.

Definisi 3.8 (Choudhury, 2009) Diberikan ruang metrik (X, d) dan pemetaan $T: X \to X$. Pemetaan T dikatakan sebagai kontraksi *weak C-contraction* jika terdapat fungsi $\psi: [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ kontinu dan memenuhi $\psi(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y = 0$, sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku bahwa:

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Tx)] - \psi(d(x, Ty), d(y, Tx)).$$

Teorema 3.9 (Choudhury, 2009) Misalkan (X, d) adalah ruang metrik lengkap dan $T: X \to X$ suatu pemetaan. Jika pemetaan T merupakan pemetaan *weak C-contraction* maka T memiliki tepat satu titik tetap.

Apabila $\psi(x, y) = k(x + y)$ dengan $0 < k < \frac{1}{2}$, maka kondisi tersebut kembali ke kontraksi Chatterjea klasik, sehingga kontraksi Chatterjea merupakan kasus khusus dari *weak C-contraction*; dengan kata lain, *weak C-contraction* merupakan generalisasi sejati dari kontraksi Chatterjea. Namun, *weak C-contraction* tidak dapat dinyatakan sebagai kasus khusus dari kontraksi Ćirić karena keberadaan fungsi ψ yang dapat dipilih dalam konteks nonlinier dan bergantung pada pasangan $d(x, Ty)$ dan $d(y, Tx)$ secara terpisah, bukan sekadar maksimum dari kelima jarak seperti pada kontraksi Ćirić.

3.4 Kontraksi Singh-Chatterjea

Bekri dan Fabiano (2025) memperkenalkan variasi kontraksi Chatterjea yang didefinisikan pada iterasi ke-p dari suatu pemetaan. Konsep ini merupakan penggabungan antara teorema titik tetap untuk pemetaan teritrasi dengan kontraksi Chatterjea. Berikut ini diberikan definisi dan teorema yang dimaksudkan secara formal.

Definisi 3.10 (Bekri & Fabiano, 2025) Diberikan ruang metrik (X, d) dan pemetaan $T: X \to X$. Pemetaan T disebut sebagai kontraksi Singh-Chatterjea jika terdapat $p \in \mathbb{N}$ dan $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku:

$$d(T^p x, T^p y) \leq \beta[d(x, T^p y) + d(y, T^p x)].$$

Teorema 3.11 (Bekri & Fabiano, 2025) Misalkan (X, d) adalah ruang metrik lengkap dan $T: X \to X$ suatu pemetaan. Jika pemetaan T merupakan pemetaan kontraksi Singh-Chatterjea maka T memiliki titik tetap tunggal $x^* \in X$. Lebih lanjut, untuk setiap $x_0 \in X$, barisan iteratif $\{T^n x_0\}$ konvergen ke x^*.

Apabila $p = 1$, kondisi pada definisi di atas akan kembali ke kontraksi Chatterjea klasik untuk nilai $\beta \neq 0$. Hasil ini penting karena suatu pemetaan mungkin tidak memenuhi sifat kontraksi Chatterjea pada iterasi pertama, tetapi dapat memenuhinya pada iterasi ke-p. Ketika $p > 1$, kelas ini bersifat independen terhadap kelas Chatterjea, artinya tidak terdapat implikasi dua arah di antara keduanya.

3.5 Tipe Suzuki-Chatterjea

Terinspirasi oleh karya Suzuki yang memperkenalkan kondisi antecedent untuk memperlemah syarat kontraksi Banach, Kikkawa dan Suzuki (2008) mengadaptasi pendekatan serupa untuk kelas kontraksi lainnya. Ide ini kemudian diperluas oleh Imdad dan Erduran (2013) untuk kontraksi tipe Chatterjea. Meskipun Imdad dan Erduran (2013) merumuskannya dalam kerangka ruang metrik parsial (partial metric spaces), kondisi tersebut dapat direduksi secara alami ke ruang metrik klasik dengan menetapkan $p(x,y) = d(x,y)$. Berikut adalah formulasi standarnya pada ruang metrik klasik.

Definisi 3.12 (Imdad & Erduran, 2013) Diberikan ruang metrik (X,d) dan pemetaan $T: X \to X$. Pemetaan T disebut memenuhi kondisi Tipe Suzuki-Chatterjea jika terdapat $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $\frac{1}{2} d(x,Tx) < d(x,y)$ berlaku:

$$d(Tx,Ty) \leq \beta[d(x,Ty) + d(y,Tx)].$$

Teorema 3.13 (Imdad & Erduran, 2013) Misalkan (X,d) adalah ruang metrik lengkap dan $T: X \to X$ suatu pemetaan. Jika pemetaan T memenuhi kondisi Tipe Suzuki-Chatterjea maka T memiliki titik tetap tunggal $x^* \in X$. Lebih lanjut, untuk setiap $x_0 \in X$, barisan iteratif $\{T^n x_0\}$ konvergen ke x^*.

Kondisi ini lebih lemah daripada kontraksi Chatterjea klasik karena setiap kontraksi Chatterjea otomatis memenuhi kondisi tipe Suzuki-Chatterjea (ketaksamaan berlaku untuk semua x, y, sehingga otomatis terpenuhi untuk subset yang memenuhi $\frac{1}{2} d(x,Tx) < d(x,y)$. Di sisi lain, terdapat pemetaan yang memenuhi kondisi tipe Suzuki-Chatterjea tetapi bukan merupakan kontraksi Chatterjea, seperti yang ditunjukkan oleh Imdad & Erduran (2013).

Lebih lanjut, Hashimoto dkk. (2026) mengidentifikasi kondisi terlemah untuk kontraksi tipe Chatterjea, yang dinyatakan sebagai berikut: untuk setiap $\epsilon > 0$ dan $\delta > 0$ sehingga

$$\frac{1}{2}[d(x,Ty) + d(y,Tx)] < \epsilon + \delta$$

berakibat $d(Tx,Ty) \leq \epsilon$; dan jika $x \neq y$, maka

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}[d(x,Ty) + d(y,Tx)].$$

Kondisi ini diklaim optimal, artinya tidak dapat diperlemah lagi tanpa menghilangkan jaminan eksistensi titik tetap.

Berikut ini disajikan ringkasan dari kaitan antara tipe-tipe Chatterjea yang telah dijabarkan di atas dalam bentuk tabel.

Tabel 1. Matriks Implikasi Antar Kelas Kontraksi Tipe Chatterjea yang Dibahas

Kelas Kontraksi	Chatterjea	Zamfirescu	Ćirić	Weak C-contraction	Singh-Ch (p>1)	Suzuki-Ch

Chatterjea	≡	✓	✓	✓	✓	✓
Zamfirescu	✗	≡	✓	✗	✗	✗
Ćirić	✗	✗	≡	✗	✗	✗
Weak C-contraction	✗	✗	✗	≡	✗	✗
Singh-Ch (p>1)	✗	✗	✗	✗	≡	✗
Suzuki-Ch	✗	✗	✗	✗	✗	≡

Keterangan:

✓ : Kelas baris mengimplikasikan kelas kolom (setiap anggota baris pasti anggota kolom)

✗ : Tidak ada implikasi (dapat diberikan contoh penyangkal)

≡ : Kelas yang sama (atau ekuivalen dalam konteks yang dibahas)

Chatterjea mengimplikasikan semua kelas lain: ia memenuhi kondisi ketiga Zamfirescu, merupakan kasus khusus Ćirić (dengan $\alpha = 2\beta$), *weak C-contraction* (dengan $\psi = 0$), Singh-Chatterjea (dengan $p = 1$), dan Suzuki-Chatterjea (karena ketaksamaan berlaku untuk semua x, y). Sebaliknya, Zamfirescu mengimplikasikan Ćirić (karena setiap anggotanya adalah Banach, Kannan, atau Chatterjea), tetapi tidak mengimplikasikan Chatterjea (bisa hanya Banach atau Kannan). Ćirić merupakan kelas kontraksi global paling luas, sehingga tidak secara otomatis mengimplikasikan kelas lain yang memiliki struktur lebih spesifik. *Weak C-contraction* tidak mengimplikasikan kelas lain akibat koefisien tetap $\frac{1}{2}$ dan keberadaan fungsi kontrol ψ; demikian pula Singh-Chatterjea ($p > 1$) bersifat independen karena syarat kontraksi hanya berlaku pada iterasi ke-p. Suzuki-Chatterjea merupakan kondisi terlemah secara logis (hanya mensyaratkan pertidaksamaan pada subset titik yang memenuhi antecedent, $\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y)$), sehingga tidak mengimplikasikan kelas mana pun selain dirinya sendiri, meskipun Chatterjea mengimplikasikannya.

4. PEMBAHASAN

Berdasarkan kajian pada bagian sebelumnya, berikut disajikan beberapa hal penting yang perlu ditekankan.

a. Kontraksi Chatterjea bukan perumuman Kontraksi Banach. Kontraksi Chatterjea menggunakan jarak silang, sedangkan kontraksi Banach menggunakan jarak langsung.
b. Posisi sentral Chatterjea. Dari Tabel 1 terlihat jelas bahwa Chatterjea mengimplikasikan semua kelas lain yang dibahas (Zamfirescu, Ćirić, weak Chatterjea, Singh-Chatterjea, dan Suzuki-Chatterjea). Sebaliknya, tidak ada satu pun kelas lain yang dapat mengimplikasikan Chatterjea. Artinya, jika suatu pemetaan sudah memenuhi syarat Chatterjea, maka ia otomatis masuk ke semua varian tersebut. Ini menunjukkan bahwa kontraksi Chatterjea merupakan kontraksi yang kuat meskipun bentuknya sederhana.
c. Kelebihan teoretis Chatterjea. Subrahmanyam (1975) membuktikan bahwa kontraksi Chatterjea (juga Kannan) dapat mengkarakterisasi kelengkapan ruang

metrik: suatu ruang metrik lengkap jika dan hanya jika setiap kontraksi Chatterjea di ruang itu memiliki titik tetap. Jadi, Chatterjea lebih unggul dalam konteks teori kelengkapan.

d. Peran setiap tipe kontraksi. Zamfirescu menyatukan Banach, Kannan, dan Chatterjea. Ćirić adalah kelas lebih luas dengan mencakup versi Zamfirescu. Weak C-contraction (Choudhury) menggeneralisasi Chatterjea secara sejati melalui fungsi kontrol ψ yang melonggarkan pertidaksamaan. Singh-Chatterjea memindahkan syarat ke iterasi ke-p, berguna ketika pemetaan asli gagal memenuhi Chatterjea tetapi iterasi ke-p nya memenuhi. Suzuki-Chatterjea, sebagai kondisi terlemah karena hanya mewajibkan pertidaksamaan pada subset pasangan titik yang memenuhi syarat antecedent.
e. Implikasi praktis. Peneliti atau mahasiswa yang menghadapi masalah eksistensi solusi (misalnya pada persamaan diferensial atau integral) tidak perlu terbatas pada Banach. Mereka dapat memeriksa apakah pemetaan yang muncul memenuhi Chatterjea atau varian lainnya, lalu memilih teorema titik tetap yang paling sesuai. Pemahaman tentang hubungan implikasi antar kelas ini membantu dalam memilih jalur pembuktian yang paling efisien.
f. Keterbatasan. Tulisan ini hanya membahas ruang metrik klasik dan pemetaan bernilai tunggal. Perluasan ke ruang yang lebih umum (b-metrik, metrik parsial, ruang modular) atau ke pemetaan multinilai tidak dibahas dalam tulisan ini..

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Tinjauan ini menyimpulkan tiga hal utama. Pertama, kontraksi Chatterjea bukan perumuman dari kontraksi Banach karena keduanya memiliki struktur jarak yang berbeda secara fundamental. Kedua, dari lima varian yang dibahas (Zamfirescu, Ćirić, *weak C-contraction*, Singh-Chatterjea, dan Suzuki-Chatterjea), kontraksi Chatterjea mengimplikasikan semua varian tersebut, namun tidak ada satupun varian yang mengimplikasikan Chatterjea. Ketiga, keunggulan teoretis Chatterjea terletak pada kemampuannya mengkarakterisasi kelengkapan ruang metrik, yang tidak dimiliki kontraksi Banach. Dengan demikian, pemetaan hubungan implikasi antar kelas kontraksi tipe Chatterjea berhasil disajikan secara sistematis. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk menyusun literatur review yang lebih komprehensif mengenai teorema titik tetap tipe Chatterjea dengan pendekatan dari berbagai aspek, seperti aspek generalisasi ruang (ruang b-metrik, ruang metrik parsial, ruang metrik modular), aspek aplikasi (persamaan diferensial, integral, dan fraksional), aspek variasi pemetaan (common fixed point, pemetaan multinilai), serta aspek kondisi kontraksi (versi lokal, versi optimal Suzuki, dan fungsi pembanding taklinear).

DAFTAR PUSTAKA

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133-181.

Bekri, Z., & Fabiano, N. (2025). Fixed point theory for Singh-Chatterjea type contractive mappings. *arXiv preprint,* arXiv:2510.11975v1.

Chatterjea, S. K. (1972). Fixed point theorems. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 25, 727-730.

Choudhury, B. S. (2009). Unique fixed point theorem for weakly C-contractive mappings. *Kathmandu University Journal of Science, Engineering and Technology*, 5(1), 6–13.

Ćirić, Lj. B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(2), 267-273.

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22, 1-72.

Hashimoto, S., Kikkawa, M., Machihara, S., & Saghir, A. (2026). On the weakest conditions for the existence of fixed points of Kannan and Chatterjea type contractions. *arXiv preprint*, arXiv:2505.01672v4.

Hausdorff, F. (1914). Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit.

Imdad, M., & Erduran, A. (2013). Suzuki-type generalization of Chatterjea contraction mappings on complete partial metric spaces. *Journal of Operators*, 2013, Article 923843.

Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 60, 71-76.

Kikkawa, M., & Suzuki, T. (2008). Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(9), 2942-2949.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons.

Park, S. (2024). On the family of theorems on metric completeness. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 17(4), 2370-2383.

Patil, J., Hardan, B., Ahire, Y. M., Hamoud, A. A., & Bachhav, A. (2022). Recent advances on fixed point theorems. *Bulletin of Pure and Applied Sciences Section E Mathematics & Statistics*, 41E(1), 34-45.

Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis (3rd ed.).* New York: McGraw-Hill.

Subrahmanyam, P. V. (1975). Completeness and fixed points. *Monatshefte für Mathematik*, 80, 325-330.

Zamfirescu, T. (1972). Fix point theorems in metric spaces. *Archiv der Mathematik*, 23, 292-298.