



Beberapa Perumuman Kontraksi Kannan di Ruang Metrik Klasik yang Terkait Konsep Titik Tetap

¹Syamsuddin Mas'ud*

¹ Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, Indonesia

*Email: syamsuddinm@unm.ac.id

ABSTRAK

Kontraksi Kannan (1968) menjamin eksistensi titik tetap tanpa syarat kontinuitas, berbeda dengan prinsip Banach. Artikel ini menyajikan tinjauan literatur tentang tujuh perumuman kontraksi Kannan di ruang metrik klasik, yaitu m -Kannan (2025), Hardy-Rogers (1973), mutual Kannan (2022), kontraksi dengan pemetaan bantu (2011), F -Kannan (2020), kontraksi terkondensasi (2025), dan kontraksi multiplikatif (2025). Setiap perumuman disajikan dalam bentuk definisi serta syarat reduksi eksplisit ke kontraksi Kannan klasik. Berdasarkan pengelompokan pendekatan matematis, terlihat bahwa perumuman berkembang dari bentuk linear menuju nonlinier. Tiga dari tujuh kelas terbit pada tahun 2025, menunjukkan topik ini masih aktif diteliti. Sebagai kontribusi, artikel ini memetakan ketujuh kelas dalam satu kerangka yang terpadu dan menyajikan syarat reduksi masing-masing secara eksplisit. Beberapa peluang penelitian lanjutan juga diidentifikasi, seperti perluasan ke ruang metrik tergeneralisasi dan studi tentang laju konvergensi.

Kata Kunci: Titik Tetap; Kontraksi Kannan; Ruang Metrik Klasik; Perumuman

ABSTRACT

The Kannan contraction (1968) guarantees the existence of a fixed point without continuity, unlike the Banach principle. This article reviews seven generalizations of Kannan contractions in classical metrik spaces, namely m -Kannan (2025), Hardy-Rogers (1973), mutual Kannan (2022), contraction with auxiliary mapping (2011), F -Kannan (2020), condensed Kannan (2025), and multiplicative Kannan (2025). Each generalization is presented with its definition and explicit reduction conditions to the classical Kannan contraction. Based on the classification of mathematical approaches, the generalizations show an evolution from linear toward nonlinear forms. Three of the seven classes were published in 2025, indicating that this topic remains actively researched. As a contribution, this article maps the seven classes within a single unified framework and presents explicit reduction conditions for each. Several opportunities for further research are also identified, such as extensions to generalized metrik spaces and studies on convergence rates.

Keywords: Fixed Point; Kannan Contraction; Classical Metrik Space; Generalization

1. PENDAHULUAN

Teori titik tetap merupakan salah satu pilar fundamental dalam analisis fungsional. Prinsip kontraksi Banach (1922) yang mensyaratkan kontinuitas pemetaan telah menjadi landasan utama selama lebih dari seratus tahun. Hingga saat ini, usianya telah melampaui seratus tahun namun pengaruhnya masih terasa di berbagai cabang matematika (Gassem, dkk., 2025). Prinsip ini menjamin bahwa setiap pemetaan yang memperpendek jarak secara seragam pada ruang metrik lengkap pasti memiliki tepat satu titik tetap. Pada tahun 1968, Kannan memperkenalkan kelas pemetaan baru yang berbeda secara fundamental. Keunikan kontraksi Kannan

terletak pada kemampuannya menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap tanpa harus bersifat kontinu, sebuah fenomena yang tidak mungkin terjadi pada kontraksi Banach.

Untuk memahami kontraksi Kannan, prasyarat dasar yang harus dikuasai adalah konsep ruang metrik lengkap. Definisi formal ruang metrik mengacu pada literatur standard.

Definisi 1.1 (Fréchet, 1906) Diberikan himpunan tak kosong X dan pemetaan $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dengan sifat bahwa untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku:

- i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Pemetaan d disebut metrik atas X dan (X, d) disebut ruang metrik.

Selain itu, untuk mendukung pemahaman pada kajian-kajian berikutnya, diberikan juga definisi dari barisan konvergen, barisan Cauchy, dan kelengkapan di ruang metrik (Hausdorff, 1914; Kreyszig, 1978; Rudin, 1976). Berikut definisi yang dimaksud dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu titik di X .

Definisi 1.2 (Fréchet, 1906) Diberikan ruang metrik (X, d) dan barisan $\{x_n\}$ di dalam X .

- i) Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq K$, $d(x_n, x) < \epsilon$.
- ii) Barisan $\{x_n\}$ dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $m, n \geq K$, $d(x_m, x_n) < \epsilon$.
- iii) Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya merupakan barisan konvergen.

Selanjutnya, berikut ini diberikan definisi dari pemetaan kontraksi Kannan yang merupakan pembahasan utama dalam tulisan ini.

Definisi 1.3 (Kannan, 1968) Diberikan ruang metrik (X, d) dan pemetaan $T: X \rightarrow X$. Pemetaan T dikatakan sebagai kontraksi Kannan jika terdapat $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku bahwa:

$$d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)].$$

Merujuk pada definisi kontraksi di atas, Kannan membuktikan eksistensi dan ketunggalan titik tetapnya. Berikut ini diberikan pernyataan formal dari hasil Kannan tersebut dalam bentuk teorema.

Teorema 1.4 (Kannan, 1968) Diberikan ruang metrik (X, d) dan pemetaan $T: X \rightarrow X$. Jika pemetaan T merupakan pemetaan yang memenuhi kontraksi Kannan maka T memiliki tepat satu titik tetap.

Perbedaan mendasar antara kontraksi Banach dan Kannan terletak pada struktur ketaksamaan. Pada kontraksi Banach di ruang metrik (X, d) , menyatakan bahwa pemetaan T memenuhi $d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y)$ untuk $\beta \in [0, 1)$, yang

merepresentasikan jarak antara bayangan dua titik berkaitan (dalam arti memperkecil) jarak kedua titik tersebut. Sedangkan ruas kanan kontraksi Kannan, $[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$, hanya melibatkan kombinasi jarak dari setiap titik ke bayangannya sendiri, tanpa memasukkan jarak antar titik itu sendiri, $d(x, y)$. Struktur ini memungkinkan suatu pemetaan merupakan kontraksi Kannan tanpa harus kontinu yang membedakannya dengan kontraksi Banach yang justru harus kontinu.

Pada pandangan pertama, rumus ini tampak tidak biasa karena ruas kanan sama sekali tidak memuat jarak antara titik x dan y secara langsung. Namun justru dari keanehan inilah lahir berbagai perkembangan yang menarik. Subrahmanyam (1975) kemudian membuktikan bahwa kelas kontraksi Kannan ternyata mengkarakterisasi kelengkapan suatu ruang metrik, sebuah sifat yang tidak dimiliki oleh kontraksi Banach. Hal ini juga dikutip kembali oleh Berinde dan Păcurar (2021) dalam tulisannya tentang aproksimasi titik tetap Kannan.

Tulisan ini lahir dari sebuah kegelisahan yang sederhana. Sejauh pengamatan penulis, belum banyak ulasan dalam bahasa Indonesia yang secara utuh memetakan berbagai hasil pengembangan dari kontraksi Kannan. Padahal usianya telah lebih dari setengah abad, dan berbagai turunannya telah banyak bermunculan. Dalam artikel ini, penulis mencoba mengumpulkan dan mengelompokkan berbagai perumuman tersebut berdasarkan jenis pendekatan yang digunakan. Harapannya, pembaca yang baru memasuki bidang ini dapat memperoleh gambaran yang utuh tanpa harus meraba-raba dari satu artikel ke artikel lain.

Ruang lingkup tulisan ini sengaja dibatasi. Penulis hanya membahas pemetaan bernilai tunggal pada ruang metrik klasik, bukan pada ruang metrik tergeneralisasi seperti ruang b -metrik, ruang metrik *cone*, ataupun ruang metrik parsial. Pembatasan ini dirasa penting agar pembahasan tidak melebar ke berbagai arah yang dapat membingungkan pembaca pemula.

2. METODE PENELITIAN

Artikel ini disusun menggunakan metode studi literatur dengan pendekatan komparatif-deskriptif. Penelusuran dilakukan terhadap artikel-artikel seminar dan penelitian terkini yang membahas perumuman kontraksi Kannan dengan kriteria: (1) pemetaan bernilai tunggal pada ruang metrik lengkap, (2) ruang yang digunakan haruslah ruang metrik klasik, (3) Perumuman tersebut harus dapat dikembalikan ke bentuk Kannan asli dengan memilih parameter atau fungsi tertentu, dan (4) publikasi dalam jurnal bereputasi atau literatur yang dapat diverifikasi melalui basis data akademik.

Dari hasil penelusuran, dipilih tujuh kelas perumuman yang disajikan dalam tulisan ini. Setiap kelas dikaji definisi formal yang diambil langsung dari sumber terpercaya/valid, teorema titik tetap yang dinyatakan dalam literatur, dan bagaimana syarat yang diberikan agar perumuman itu kembali ke kontraksi Kannan yang klasik (syarat reduksi ke Kannan klasik).

3. KELAS PERUMUMAN KONTRAKSI KANNAN

Setelah memahami definisi dan sifat dasar kontraksi Kannan, muncul pertanyaan alami: sejauh mana kondisi ini dapat dilonggarkan tanpa kehilangan jaminan titik tetap? Pertanyaan ini telah melahirkan berbagai penelitian selama lima dekade terakhir.

Bagian ini menyajikan tujuh jalur perumuman. Perlu dicatat bahwa tidak semua definisi di bawah ini secara eksplisit dituliskan oleh penulis aslinya dalam bentuk ketaksamaan seperti yang tersaji di sini. Sebagian merupakan formulasi ulang yang penulis petik dari teorema utama masing-masing, namun tetap mempertahankan esensi dan parameter yang membedakannya dari Kannan klasik. Dengan demikian, setiap perumuman dapat disajikan dalam format yang konsisten, yaitu sebagai definisi kontraksi, sekaligus menunjukkan bagaimana ia dapat direduksi kembali ke bentuk Kannan asli melalui pemilihan parameter tertentu.

Ketujuh perumuman berikut dipilih karena tetap berada dalam ruang metrik klasik (bukan ruang metrik tergeneralisasi). Urutan penyajiannya disusun dari pendekatan yang lebih klasik menuju yang lebih mutakhir.

3.1 Kontraksi m -Kannan

Langkah sederhana untuk memperluas kontraksi Kannan adalah dengan mengganti pemetaan T dengan iterasinya T^m . Gagasan ini sederhana karena dibandingkan dengan mensyaratkan kondisi kontraksi pada T secara langsung, kita cukup memodifikasi pemetaannya agar berlaku pada komposisi T sebanyak m kali.

Definisi 3.1 (Cvetković, 2024) Pemetaan $T: X \rightarrow X$ pada ruang metrik (X, d) disebut kontraksi m -Kannan jika terdapat konstanta $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ dan $m \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $x, y \in X$,

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha [d(x, Tx) + d(y, Ty)].$$

Apa yang dijamin oleh bentuk ini? Ternyata, sama seperti Kannan asli. Teorema yang menyertainya mengatakan bahwa setiap m -Kannan mapping pada ruang metrik lengkap memiliki tepat satu titik tetap. Hal ini sejalan dengan kondisi bahwa kontraksi Kannan klasik sendiri merupakan kasus khusus dari bentuk ini, yakni ketika $m = 1$. Sedangkan arah sebaliknya tidak selalu berlaku.

3.2 Kontraksi Hardy-Rogers

Lompatan besar berikutnya datang dari Hardy-Rogers pada tahun 1973. Ia mengajukan sebuah bentuk yang jauh lebih umum dari yang pernah ada sebelumnya. Rumusnya memang panjang, tetapi perlu disimak karena ia merangkum banyak kemungkinan sekaligus.

Definisi 3.2 (Hardy & Rogers, 1973) Diberikan konstanta $K_i \geq 0$ untuk $i = 1, \dots, 5$ dengan sifat

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 < 1.$$

Pemetaan $T: X \rightarrow X$ pada ruang metrik (X, d) disebut kontraksi Kannan Hardy-Rogers jika untuk semua $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq K_1 d(x, y) + K_2 d(x, Tx) + K_3 d(y, Ty) + K_4 d(x, Ty) + K_5 d(y, Tx).$$

Jika kita perhatikan, ruas kanan memuat hampir semua kemungkinan jarak yang bisa muncul antara x, y, Tx , dan Ty . Hardy dan Rogers memilih batasan koefisien secara cermat agar teorema titik tetap tetap berlaku, yaitu bahwa pada ruang metrik lengkap, pemetaan ini memiliki titik tetap yang tunggal. Yang menarik, kontraksi Kannan muncul sebagai kasus khusus dari bentuk ini, yakni dengan memilih $K_2 = K_3 = \beta$ dan $K_1 = K_4 = K_5 = 0$.

3.3 Kontraksi Mutual

Perkembangan selanjutnya membawa perhatian pada kasus dua pemetaan sekaligus. Mohapatra dkk. pada tahun 2022 mengajukan kondisi kontraksi yang melibatkan dua pemetaan berbeda, namun tetap mempertahankan struktur Kannan pada ruas kanannya.

Definisi 3.3 (Mohapatra, dkk., 2022) Diberikan ruang metrik (X, d) . Dua pemetaan $T_1, T_2: X \rightarrow X$ merupakan kontraksi Mutual Kannan jika terdapat konstanta $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku,

$$d(T_1x, T_2y) \leq b [d(x, T_1x) + d(y, T_2y)]$$

Jika kita perhatikan, ruas kanan memuat dua jarak orbit, masing-masing mengukur seberapa jauh x dari bayangannya T_1x , dan y dari bayangannya T_2y . Ini adalah adaptasi langsung dari struktur Kannan ke dalam konteks dua pemetaan. Yang menarik, apabila $T_1 = T_2 = T$, kondisi ini mereduksi tepat menjadi kontraksi Kannan klasik.

3.4 Kontraksi Kannan dengan Pemetaan Bantu

Pendekatan lain datang dari Moradi dan Alimohammadi (2011). Mereka tidak langsung memperumum bentuk kontraksinya, tetapi memperkenalkan pemetaan bantu yang bertugas "menerjemahkan" kondisi Kannan ke dalam bentuk lain.

Definisi 3.4 (Moradi & Alimohammadi, 2011) Diberikan ruang metrik (X, d) dan dua pemetaan $T, S: X \rightarrow X$ dengan sifat T kontinu, injektif, dan konvergen secara *subsequent*. Pemetaan S dikatakan perluasan kontraksi Kannan jika terdapat konstanta $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku,

$$d(TSx, TSy) \leq \lambda [d(Tx, TSx) + d(Ty, TSy)].$$

Berbeda dari pendekatan sebelumnya, kondisi kontraksi di sini tidak dikenakan langsung pada S , melainkan pada komposisi TS . Pemetaan T berperan sebagai pemetaan bantu yang mengatur ulang struktur ruang, sehingga kondisi Kannan diterapkan dalam "sudut pandang" T . Konsekuensinya, jika T dipilih sebagai pemetaan identitas, kondisi ini mereduksi S menjadi kontraksi Kannan klasik.

3.5 Kontraksi F-Kannan

Pada tahun 2012, Wardowski memperkenalkan kontraksi tipe-F sebagai cara untuk memperumum prinsip Banach. Ide dasarnya adalah mengganti metrik dengan fungsi F sebelum dibandingkan. Batra, Gupta, dan Sahni kemudian mengadaptasi ide ini ke dalam konteks Kannan. Mereka memperkenalkan kelas F -Kannan mapping yang tidak hanya memperumum kontraksi Kannan, tetapi juga mengkarakterisasi kelengkapan ruang metrik, sebagaimana halnya kontraksi Kannan klasik.

Definisi 3.5 (Batra, dkk., 2020) Diberikan ruang metrik (X, d) . Misalkan $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi:

- i) F naik tegas,
- ii) Untuk setiap barisan $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$, berlaku $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} F\alpha_n = -\infty$,
- iii) Terdapat $k \in (0, 1)$ sehingga $\lim_{a \rightarrow 0^+} a^k F a = 0$.

Pemetaan $T: X \rightarrow X$ disebut F -Kannan jika memenuhi dua syarat berikut:

- a. $Tx \neq Ty \Rightarrow Tx \neq x$ atau $Ty \neq y$;
- b. Terdapat $\tau > 0$ sehingga untuk semua $x, y \in X$ dengan $Tx \neq Ty$ berlaku

$$\tau + Fd(Tx, Ty) \leq F\left(\frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}\right).$$

Jika kita perhatikan, kondisi kontraksi di sini tidak dikenakan pada jarak $d(Tx, Ty)$ secara langsung, melainkan setelah terlebih dahulu diproses oleh fungsi F . Kehadiran $\tau > 0$ di ruas kiri memastikan adanya "jarak minimum" yang harus dipenuhi. Yang menarik, apabila dipilih $F(t) = \ln t$, kondisi ini mereduksi T menjadi kontraksi Kannan klasik dengan konstanta $\beta = \frac{e^{-\tau}}{2} < \frac{1}{2}$.

3.6 Kontraksi Kannan Terkondensasi

Pendekatan berikutnya datang dari Wahab, Ibrahim, dan Musa pada tahun 2025. Mereka menggabungkan dua ide sekaligus: rata-rata kuadrat berbobot di ruas atas dan rata-rata geometris berbobot di ruas bawah. Hasilnya adalah kondisi yang tidak hanya membatasi seberapa besar $d(Tx, Ty)$, tetapi juga seberapa kecilnya.

Definisi 3.6 (Wahab, dkk., 2025) Diberikan ruang metrik (X, d) . Pemetaan $T: X \rightarrow X$ dikatakan pemetaan Kannan terkondensasi jika terdapat konstanta $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, dan $\mu \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku:

$$\mu d(x, Tx)^\alpha d(y, Ty)^{1-\alpha} \leq d(Tx, Ty) \leq \lambda [d(x, Tx)^{2\alpha} + d(y, Ty)^{2(1-\alpha)}].$$

Jika kita perhatikan, kondisi ini hadir dalam dua bagian ketaksamaan. Ketaksamaan pertama memberikan batas atas melalui rata-rata berbobot dari kuadrat jarak orbit masing-masing titik, dengan bobot yang dikendalikan oleh parameter α . Ketaksamaan kedua memberikan batas bawah melalui rata-rata

geometris berbobot, yang memastikan $d(Tx, Ty)$ tidak terlalu kecil. Yang menarik, apabila dipilih $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $\mu = 0$, ketaksamaan pertama mereduksi tepat menjadi kontraksi Kannan klasik dengan konstanta λ .

3.7 Kontraksi Kannan Multiplikatif

Pengembangan selanjutnya memperluas kontraksi Kannan dengan mengubah cara menggabungkan jarak orbit. Daripada menggunakan rata-rata aritmetik seperti pada formulasi klasik, pendekatan ini menerapkan rata-rata geometris berbobot. Setiap jarak antara titik dan bayangannya dipangkatkan sesuai kontribusi relatifnya, lalu dikalikan.

Definisi 3.7 (Kessya & Wangwe, 2025) Diberikan ruang metrik (X, d) . Pemetaan $T: X \rightarrow X$ dikatakan kontraksi Kannan multiplikatif jika terdapat konstanta $\beta \in \mathbb{R}$ dan $\mu \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X \setminus \text{Fix}(T)$ dimana $\text{Fix}(T) = \{x \in X | Tx = x\}$, berlaku:

$$d(Tx, Ty) \leq \mu d(x, Tx)^\beta d(y, Ty)^{1-\beta}.$$

Jika kita perhatikan, ruas kanan tidak lagi berbentuk jumlah dua jarak orbit, melainkan hasil kali keduanya dengan bobot pangkat yang dikendalikan oleh parameter β . Yang menarik, apabila dipilih $\beta = \frac{1}{2}$ dan dengan ketaksamaan AM-GM, kondisi ini mereduksi T menjadi kontraksi Kannan klasik dengan konstanta $\frac{\mu}{2}$.

Setelah menguraikan ketujuh definisi secara rinci, berikut adalah ringkasan dalam bentuk tabel untuk memudahkan pembaca melihat perbandingan antar kelas sekaligus. Tabel ini menyajikan nama, tahun publikasi, bentuk umum, parameter yang terlibat, serta kondisi reduksi ke kontraksi Kannan klasik untuk masing-masing perumuman.

Tabel 1. Kelas Perumuman Kontraksi Kannan Klasik

Nama (Tahun)	Bentuk Umum	Parameter	Syarat Reduksi
m-Kannan (2025)	$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha [d(x, Tx) + d(y, Ty)]$	$\alpha \in [0, \frac{1}{2}), m \in \mathbb{N}$	$m = 1$
Hardy-Rogers (1973)	$d(Tx, Ty) \leq K_1 d(x, y) + K_2 d(x, Tx) + K_3 d(y, Ty) + K_4 d(x, Ty) + K_5 d(y, Tx)$	$K_i \geq 0, \sum K_i < 1$	$K_2 = K_3 = \beta$ dan $K_1 = K_4 = K_5 = 0$
Mutual Kannan (2022)	$d(T_1 x, T_2 y) \leq b [d(x, T_1 x) + d(y, T_2 y)]$	$b \in (0, \frac{1}{2})$	$T_1 = T_2 = T$
Kannan dengan Pemetaan Bantu (2011)	$d(TSx, TSy) \leq \lambda [d(Tx, TSx) + d(Ty, TSy)]$	$\lambda \in [0, \frac{1}{2})$	$T = I$ pemetaan identitas
F-Kannan (2020)	$\tau + Fd(Tx, Ty) \leq F(\beta [d(x, Tx) + d(y, Ty)])$	$\tau > 0, \beta \in [0, \frac{1}{2})$	$F(t) = \ln t$
Kannan Terkondensasi (2025)	$\mu d(x, Tx)^\alpha d(y, Ty)^{1-\alpha} \leq \lambda [d(x, Tx)^{2\alpha} + d(y, Ty)^{2(1-\alpha)}]$	$\alpha \in (0, 1), \lambda \in [0, \frac{1}{2}), \mu \in [0, 1)$	$\alpha = \frac{1}{2}, \mu = 0$
Kannan Multiplikatif (2025)	$d(Tx, Ty) \leq \mu d(x, Tx)^\beta d(y, Ty)^{1-\beta}$	$\beta \in \mathbb{R}, \mu \in [0, 1)$	$\beta = \frac{1}{2}$ (Gunakan AM-GM)

Dari tabel di atas, terlihat bahwa seluruh perumuman yang disajikan dapat direduksi kembali ke kontraksi Kannan klasik melalui pemilihan parameter atau fungsi tertentu. Hal ini menunjukkan bahwa ide dasar Kannan, bahwa kontinuitas tidak diperlukan asalkan struktur ketaksamaan diubah, tetap menjadi fondasi yang kokoh meskipun telah dimodifikasi ke berbagai arah. Selain itu, perkembangan mutakhir seperti m -Kannan, kontraksi terkondensasi, dan kontraksi multiplikatif (semuanya terbit pada tahun 2025) menunjukkan bahwa penelitian di bidang ini masih sangat aktif dan terbuka untuk eksplorasi lebih lanjut.

4. PEMBAHASAN

Setelah menyajikan ketujuh kelas perumuman beserta ringkasannya dalam tabel, bagian ini akan membahas beberapa hal penting yang dapat ditarik dari pemaparan tersebut. Pembahasan difokuskan pada dua aspek utama: pengelompokan dan tren perkembangan, dan identifikasi celah penelitian yang masih terbuka dari masing-masing kelas.

4.1 Pengelompokan dan Tren Perkembangan

Ketujuh perumuman yang disajikan dapat dikelompokkan berdasarkan pendekatan matematisnya. Ada yang memperluas ruas kanan (Hardy-Rogers), memodifikasi ruas kiri (m -Kannan), beralih ke dua pemetaan (mutual Kannan), melibatkan pemetaan bantu (Moradi & Alimohammadi), menggunakan fungsi kontrol (F -Kannan), memberi batas atas dan bawah sekaligus (terkondensasi), atau mengganti penjumlahan dengan perkalian (multiplikatif). Dari sisi waktu, perumuman awal cenderung linear dan umum (Hardy-Rogers, 1973), kemudian bergeser ke arah yang lebih spesifik dan kontekstual (Moradi & Alimohammadi, 2011), dan dalam lima tahun terakhir berkembang ke arah nonlinier dengan berbagai variasi baru (F -Kannan, mutual Kannan, serta tiga kelas terbaru di tahun 2025). Hal ini menunjukkan bahwa topik perumuman kontraksi Kannan masih aktif dan terus berkembang.

4.2 Peluang Pengembangan Lebih Lanjut

Setelah menyajikan ketujuh kelas perumuman, terdapat beberapa kemungkinan arah yang dapat ditindaklanjuti. Namun, perlu diingat bahwa tulisan ini sendiri memiliki keterbatasan, yaitu hanya membahas ruang metrik klasik, tidak membahas laju konvergensi, dan tidak memetakan hubungan implikasi antar kelas secara sistematis. Keterbatasan ini sekaligus menjadi peluang bagi peneliti lain untuk melengkapinya.

Pertama, ketujuh kelas ini didefinisikan pada ruang metrik klasik. Langkah awal yang dapat dilakukan adalah memeriksa apakah masing-masing kelas sudah pernah dikaji pada ruang tergeneralisasi seperti ruang b -metrik, ruang metrik parsial, ruang metrik cone, atau ruang metrik terurut parsial. Jika belum ditemukan, maka kajian untuk memperluasnya dapat dilakukan.

Kedua, tulisan ini hanya membahas eksistensi dan ketunggalan titik tetap. Perbandingan laju konvergensi antar kelas, khususnya antara m -Kannan dan kontraksi Kannan asli, dapat ditelusuri lebih dahulu apakah sudah ada yang membahas. Jika belum, studi tersebut dapat menjadi peluang penelitian.

Ketiga, beberapa hubungan antar kelas sudah diketahui, misalnya Hardy-Rogers mencakup Kannan sebagai kasus khusus. Namun, hubungan antara kelas-kelas yang lebih baru, seperti m -Kannan dengan kontraksi terkondensasi atau multiplikatif, dapat diperiksa terlebih dahulu apakah sudah dipetakan dalam literatur. Jika belum, maka penelusuran lebih lanjut dapat dilakukan.

5. KESIMPULAN

Tulisan ini telah menyajikan tinjauan literatur tentang tujuh perumuman kontraksi Kannan di ruang metrik klasik. Ketujuh kelas tersebut adalah kontraksi m -Kannan (2025), kontraksi Hardy-Rogers (1973), kontraksi mutual Kannan (2022), kontraksi Kannan dengan pemetaan bantu (2011), kontraksi F-Kannan (2020), kontraksi Kannan terkondensasi (2025), serta kontraksi Kannan multiplikatif (2025). Masing-masing perumuman dapat direduksi kembali ke bentuk Kannan asli melalui pemilihan parameter atau fungsi tertentu, misalnya dengan mengambil $m = 1$ pada m -Kannan, memilih $K_2 = K_3 = \beta$ pada Hardy-Rogers, atau mengambil $T_1 = T_2 = T$ pada mutual Kannan.

Dari ketujuh kelas tersebut, terlihat bahwa perumuman kontraksi Kannan berkembang melalui berbagai pendekatan yang berbeda. Ada yang memperluas ruas kanan (Hardy-Rogers), memodifikasi ruas kiri (m -Kannan), beralih ke dua pemetaan (mutual Kannan), melibatkan pemetaan bantu (Moradi & Alimohammadi), menggunakan fungsi kontrol nonlinier (F-Kannan), memberi batas atas dan bawah sekaligus (terkondensasi), serta mengubah penjumlahan menjadi perkalian (multiplikatif). Dari sisi perkembangan waktu, perumuman awal cenderung linear dan umum, kemudian bergeser ke arah yang lebih spesifik, dan dalam lima tahun terakhir berkembang ke arah nonlinier dengan tiga kelas terbaru terbit di tahun yang sama. Hal ini menunjukkan bahwa topik perumuman kontraksi Kannan masih aktif dan terus berkembang hingga saat ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133–181.
- Batra, R., Gupta, R., & Sahni, P. (2020). A new extension of Kannan contractions and related fixed point results. *The Journal of Analysis*, 28, 1143–1154. <https://doi.org/10.1007/s41478-020-00241-1>
- Berinde, V., & Păcurar, M. (2021). Kannan's fixed point approximation for solving split feasibility and variational inequality problems. *Journal of Computational*

- and *Applied Mathematics*, 386, 113217.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113217>
- Cvetković, M. (2024). On the relation of Kannan contraction and Banach contraction. *Mathematica Slovaca*, 74(5), 1291–1298. <https://doi.org/10.1515/ms-2024-0094>
- Fréchet, M. (1906). *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 1–74.
- Gassem, F., Alfedeel, A. H. A., Saleh, H. N., Aldwoah, K., Alqahtani, M. H., Tedjani, A. H., & Muflh, B. (2025). Generalizing Kannan fixed point theorem using higher-order metrik polynomials with applications to fractional differential equations. *Fractal and Fractional*, 9(9), 609. <https://doi.org/10.3390/fractalfract9090609>
- Górnicki, J. (2017). Fixed point theorems for Kannan type mappings. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19(3), 2145–2152. <https://doi.org/10.1007/s11784-017-0402-8>
- Hardy, G. E., & Rogers, T. D. (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich. *Canadian Mathematical Bulletin*, 16(2), 201–206. <https://doi.org/10.4153/CMB-1973-036-0>
- Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit und Comp.
- Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 60, 71–76.
- Kessya, J. A., & Wangwe, L. (2025). On a fixed point theorem of Karapinar for interpolative contractions. *Research in Mathematics*, 12(1), 1–4. <https://doi.org/10.1080/27684830.2025.2526218>
- Mohapatra, R. N., Navascués, M. A., Sebastián, M. V., & Verma, S. (2022). Iteration of operators with contractive mutual relations of Kannan type. *Mathematics*, 10(15), 2632. <https://doi.org/10.3390/math10152632>
- Moradi, S., & Alimohammadi, D. (2011). New extensions of Kannan fixed-point theorem on complete metrik and generalized metrik spaces. *International Journal of Mathematical Analysis*, 5(47), 2313–2320.
- Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Subrahmanyam, P. V. (1975). Completeness and fixed-points. *Monatshefte für Mathematik*, 80(4), 325–330.
- Wahab, O. T., Ibrahim, G. R., & Musa, S. A. (2025). "Condensed Kannan-Type Maps and Their Efficiency Measures in Complete Metrik Spaces". *Kyungpook Mathematical Journal*, 65(3), 439-451.